

上海工程技术大学

硕士研究生入学考试《高等代数》初试考试大纲

考试科目：高等代数

考试代码：813

考试参考书目：同济大学数学系，《高等代数与解析几何》(第二版)，高等教育出版社，2016年

考试总分：150分

考试时间：3小时

一、考试目的与要求

《高等代数》考试大纲适用于统计学专业硕士研究生入学考试，其目的是考察考生对高等代数最基本内容的理解、掌握和熟练应用程度。要求考生掌握本课程的基本概念、基本理论和基本方法，具有较强的抽象能力、逻辑推理能力、运算能力以及综合分析问题和解决问题的能力。

《高等代数》考试，要求考生：

1. 系统地掌握高等代数的基本概念、基本理论和基本方法，具备独立获取代数及相关知识的能力，为进一步深造打下坚实基础。
2. 系统地掌握高等代数的运算，并理解其蕴含的数学思想。
3. 具有一定的空间想象能力、抽象概括能力和逻辑推理能力。
4. 能够将理论用于实践，联系实际分析问题，初步具备运用所学代数方法解决实际问题和专业问题的数学应用能力。

二、考试的基本内容

第1章 一元多项式

一、一元多项式

1. 掌握多项式函数的定义及加、减、乘和带余除法。
2. 理解多项式的整除及性质。

二、多项式的最高公因式

1. 掌握最高公因式的定义和最高公因式计算，能够熟练应用辗转相除法求最大公因式。

2. 了解多项式的互素及其性质。

三、因式分解唯一性定理

1. 理解不可约多项式以及因式分解的唯一性。

2. 了解重因式，重因式的计算及其判别。

四、复系数、实系数多项式和有理系数多项式

1. 理解多项式的根和代数基本定理。

2. 了解复系数多项式的不可约多项式及其因式分解。

3. 了解实系数多项式的不可约多项式及其因式分解。

4. 理解有理系数多项式的本原多项式、有理系数多项式的有理根计算和有理系数多项式的不可约判别（Eisenstein 判别法）。

本章复习重点：

- 熟练掌握带余除法计算商式与余式；掌握整除的概念及其性质。
- 熟练掌握用辗转相除法计算最高公因式；掌握多项式的互素及其性质。
- 掌握代数基本定理，会将不同数域（复数域、实数域、有理数域）下的多项式因式分解。

- 掌握有理系数多项式不可约性的判别（Eisenstein 判别法）。

第 3 章 矩阵代数

一、矩阵及其运算

掌握矩阵的运算（加、数乘、相乘、转置、方阵的行列式）及其性质。

二、矩阵的分块与初等方阵

1. 理解分块矩阵

2. 掌握矩阵的初等变换、初等方阵、矩阵的阶梯阵和矩阵等价。

三、矩阵的逆

1. 理解方阵的逆阵。

2. 掌握用初等变换法求方阵逆矩阵。

四、线性方程组

掌握用初等行变换法解线性方程组。

本章复习重点:

- 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法、转置及其运算律，分块矩阵的运算。
- 理解矩阵可逆的定义以及充分必要条件；掌握矩阵求逆的初等变换法。
- 掌握齐次和非齐次线性方程组求法（无解、有唯一解、有无穷多解）。

第 4 章 方阵的行列式

一、行列式的定义

1. 了解排列，排列的奇偶性。
2. 掌握 n 阶行列式的定义。

二、行列式的初等变换

1. 掌握行列式的行、列初等变换。
2. 理解方阵乘积的行列式以及方阵转置的行列式。

三、行列式展开

1. 掌握余子式、代数余子式和行列式按行（列）展开。
2. 理解 k 阶子式；掌握行列式的拉普拉斯展开。
3. 理解 n 阶行列式计算。

四、用行列式求逆矩阵与 Cramer（克莱姆）法则

1. 理解伴随矩阵的概念。
2. 掌握方阵可逆充要条件以及逆矩阵的公式。
3. 理解克莱姆法则。

本章复习重点:

- 熟练掌握行列式的定义、性质和展开式等方法，计算 n 阶行列式。

第 5 章 矩阵的秩与线性方程组

一、向量的线性相关性

1. 理解 n 维向量运算（加、数乘）及其性质。
2. 掌握向量组的线性组合（表示）、向量组的线性相关与无关以及向量组的线性相关性的一些基本定理。

二、向量组的秩。

1. 理解向量组的极大线性无关组。
2. 掌握向量组秩的定义。

三、矩阵的秩

1. 掌握矩阵秩的定义。
2. 熟练掌握用矩阵初等行变换求矩阵的秩和向量组秩及极大线性无关组。
3. 理解两矩阵等价的充要条件以及矩阵等价的标准形。

四、线性方程组解的结构

1. 理解齐次线性方程组的基础解系以及齐次线性方程组解的一般形式。
2. 理解非齐次线性方程组相容的条件以及非齐次线性方程组解的一般形式。

本章复习重点：

- 掌握向量组的线性相关与无关的定义与判定。
- 掌握向量组的极大无关组和秩定义；熟练掌握向量组的极大无关组和秩的求法，以及将向量组的其他向量用极大无关组线性表示的方法。
- 理解矩阵秩的定义及其求法；掌握矩阵的秩相关等式和不等式。
- 熟练掌握（齐次、非齐次）线性方程组解的判别定理、解的性质和解的结构；熟练掌握求解线性方程组的基础解系和通解的方法。

第 6 章 线性空间

一、线性空间的定义与简单性质

1. 理解线性空间的定义及其性质。
2. 理解线性空间的子空间。

二、生成元集、线性相关性和基与维数

1. 理解子空间的生成元。
2. 理解线性空间的基与维数。

三、线性空间同构、基变换与坐标变换

1. 了解线性空间同构。
2. 理解向量的坐标、基与基之间的过渡矩阵和坐标变换。

四、子空间的直和

1. 理解子空间的交以及子空间的和。
2. 理解子空间的直和。

本章复习重点：

- 理解线性空间的定义及其简单性质，会判断一个集合是否是线性空间。

- 熟练掌握线性空间、子空间交与和的基和维数的计算方法；熟练掌握子空间的直和的判断方法；熟练掌握维数公式。

- 理解过渡矩阵的定义；熟练掌握线性空间的基变换及其坐标变换公式。

第 7 章 线性变换与相似矩阵

一、线性变换的定义与性质

1. 了解线性变换的定义。
2. 理解线性变换的运算（加，数乘，乘）及其性质。

二、线性变换的矩阵与相似矩阵

1. 了解线性变换在有序基下的矩阵。
2. 了解线性变换代数与矩阵代数同构。
3. 理解线性变换在不同基下的矩阵相似。

三、特征值与特征向量

熟练掌握线性变换（矩阵）的特征值、特征向量、特征多项式的定义和性质。

四、可对角化和可对角化条件

熟练掌握线性变换可对角化（矩阵相似对角阵）的条件。

本章复习重点：

- 熟练掌握如何求解线性变换在指定基下的矩阵；熟练掌握同一线性变换的两组基之间的过渡矩阵以及坐标互化。

- 掌握特征值与特征向量的定义；熟练掌握特征值与特征向量的求法。

- 掌握线性变换和矩阵可对角化的充要条件。

第 9 章 内积空间

一、内积空间定义与基本性质

1. 掌握内积的定义及其性质。
2. 理解向量的正交与向量的长度。

二、标准正交基与 QR 分解

1. 理解标准正交基。
2. 了解矩阵的 QR 分解。

三、正交子空间与最小二乘问题

四、正规线性变换

1. 理解正交变换（正交矩阵）。
2. 理解对称变换（实对称矩阵）。
3. 理解实对称矩阵正交相似标准形和二次曲面分类。

本章复习重点：

- 掌握向量的长度和夹角；熟练掌握向量组（矩阵）是否是标准正交向量组（正交矩阵）的判断方法。
- 熟练掌握施密特正交化方法，将实对称矩阵正交对角化。

第 10 章 双线性函数与二次型

一、双线性函数

二、二次型与二次型的标准形

1. 掌握二次型及其矩阵表示。
2. 熟练掌握化二次型为标准形的计算方法。

三、惯性定理与二次曲面分类

四、正定二次型与正定矩阵

本章复习重点：

- 熟练掌握用可逆线性变换化二次型为标准形的方法。
- 掌握正定二次型的判别方法；理解负定、半负定和半正定二次型的判别。

三、考试题型

1. 单项选择题（约 30 分）
2. 填空题（约 30 分）
3. 计算题（约 60 分）
4. 证明题（约 30 分）